This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

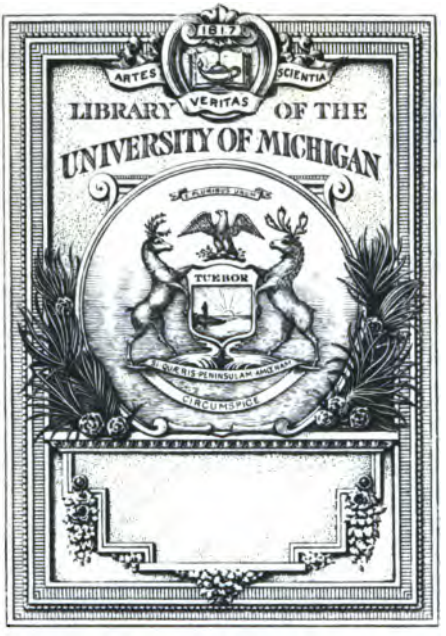
1898 to 1922

Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Darstellung

der

FORMELN

für die

Rectification der Curven,

für die Complanation

und Cubirung der Körper,

ohne Anschluss eines andern Grundsatzes als der Taylor'schen Formel.

Von

Augustin Krogen.

Darstellung

der

FORMELN

für die

Rectification der Curven,

für die

Complanation und Cubirung der Körper,

ohne Annahme

eines andern Grundsatzes

als der Taylor'schen Formel.

Von

Augustin Kregčz.

Prag.

Druck bei M. I. Landau, Altstadt, grosser Ring, N. 933.

1827.

QA
626
.K92

Dem

Wohlgeborenen Herrn

ANTON von HOFBAUER

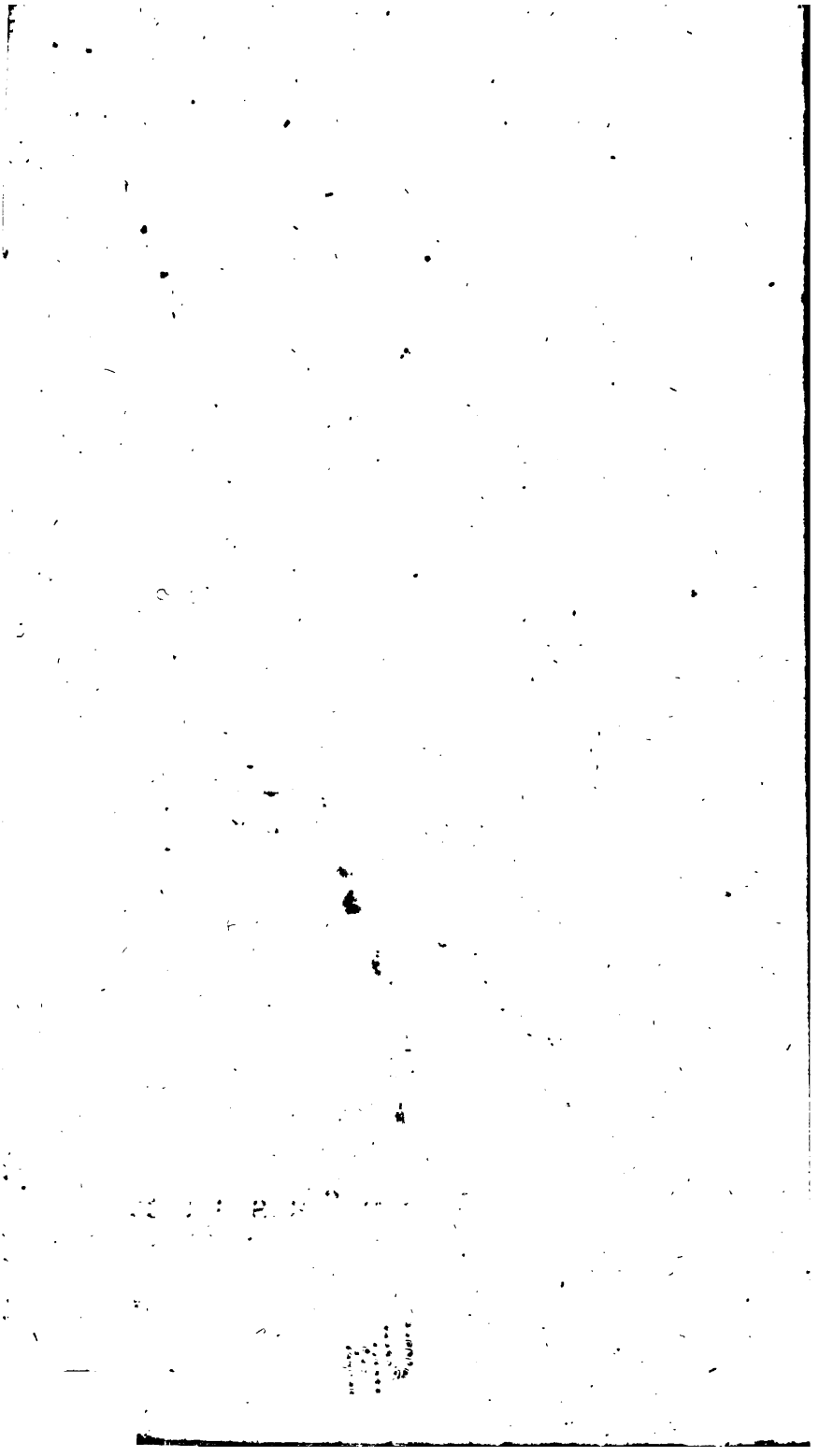
Hauptmann beim löblichen k. k. Infanterie - Regimente

Erzherzog Rainer.

Achtungsvoll gewidmet

vom

Verfasser.



W. U. Butler math fd
Bricher
1-27-37
33367

§. 1.

Wenn die veränderliche Grösse x in irgend einer Funktion derselben $= fx$, in $x \pm \Delta x$ übergeht (wo Δx willkührlich gross ist), so gibt Taylor's Formel für die geänderte Funktion $= f(x + \Delta x)$ einen Ausdruck, der seiner Form nach durch

$$fx + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \ldots$$

dargestellt werden kann, wo bekanntlich A, B, C u. s. w. beziehungsweise $= f'x$, $f''x$, $f'''x$ etc. nämlich den abgeleiteten Funktionen von fx gleich sind.

Da es mir in diesem Versuche keineswegs um die Darstellung obigen Lehrsatzes zu thun ist, so beziehe ich mich durchaus auf den musterhaften Beweis von La Grange. Wir erhalten sonach die Gleichung

$$f(x \pm \Delta x) = fx + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \ldots$$

woraus sich

$$f(x \pm \Delta x) - fx = A\Delta x + B\Delta x^2 + \ldots$$

als Betrag der Aenderung in der Funktion ergibt.

Nehmen wir ferner den Quotienten zwischen $f(x \pm \Delta x) - fx$ und Δx so erhalten wir

$$\frac{f(x \pm \Delta x) - fx}{\Delta x} = \frac{\Delta fx}{\Delta x}$$
$$= A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \cdot \cdot$$

Die Form dieser letzten Gleichung lehrt uns den für die Anwendung sehr merkwürdigen Satz: dass das Verhältniss

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

wenigstens Ein Glied enthält, welches von Δx unabhängig ist. Dass aber in der Entwickelung von

$$f(x \pm \Delta x)$$

immer ein Glied vorkommen müsse, welches die Grösse Δx bloss ein Mahl als Faktor enthält, lässt sich so leicht darthun, dass ich den Beweis füglich übergehen kann, ohne ihn erst aus dem Taylor'schen Satze holen zu dürfen.

Die Anwendung des merkwürdigen Verhältnisses, welches zwischen Δfx und Δx obwaltet, besteht in folgendem:

Gesetzt, es wäre der Quotient

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

gegeben, und man sollte die Funktion herstellen, von welcher obiger Quotient als ein auf die bekannte Art abgeleiteter, angesehen werden dürfte?

Da sich in den meisten Fällen das Verhältniss

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

nicht als ein geschlossenes Ganze darstellen lässt, so verfällt man natürlich auf den Gedanken, ob nicht etwa einige Glieder des Verhältnisses

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

hinreichen, die urspringliche Funktion fx zu bestimmen, und dieses führt mich denn auf die Beantwortung folgender Frage:

„Welche Glieder des Verhältnisses $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ sind zur Bestimmung der Stammfunktion geeignet, und warum?“

Die richtige Beantwortung dieser Frage liefert zugleich die Mittel, das aufgenommene Problem genügend zu lösen.

Wir wissen von der noch unbekannten, aus dem Verhältnisse

$$\frac{\Delta fx}{\Delta x}$$

zu suchenden Funktion fx wenigstens so viel gewiss, dass sie der Grösse und Form nach, von Δx gänzlich unabhängig ist. Dieses einzige Kennzeichen berechtigt uns zu dem Schlusse, dass fx aus keinem Gliede bestimmbar sey, welches in dem Verhältnisse $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ als abhängig von Δx erscheint, so dass es in Beziehung auf die gesuchte Funktion eben so viel ist, als wenn alle von Δx abhängigen Glieder im obigen Verhältnisse gar nicht vorhanden wären.

Da aber fx aus $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ bestimmbar seyn muss, weil $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ aus irgend einer Funktion entstanden vorausgesetzt wird, (indem es sonst eine ungereimte Forderung wäre, fx zu suchen) so muss jenes Glied, welches in dem Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$, von Δx unabhängig ist, allein im Stande seyn, fx zu bestimmen.

Es ist daher kein Grund vorhanden, Δx unendlich klein zu nehmen, damit etwa alle Glieder, welche die Grösse Δx^m enthalten (wo $m > 1$) gegen das erste $A.\Delta x$ verschwinden, welches auch bloss eine Annäherung zur Wahrheit wäre, und um so weniger darf man $\Delta x = o$ setzen, weil für diesen Fall $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ die

Form $\frac{0}{0}$ erhält, und zwischen Nullen, als keinen Grössen, offenbar auch keine Vergleichung möglich ist.

Die oben gebrauchten Schlüsse zeigen demnach genügend, wovon die Bestimmung der Funktion fx aus dem Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ abhängt, warum alle von Δx abhängigen Glieder nicht zu beachten sind, und warum endlich die Differenzial-Rechnung, sowohl auf unendlich kleine Grössen, als auch auf Nullenverhältnisse gegründet, wahre Resultate liefern musste.

Ist man daher im Stande, das Verhältniss $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ einer noch unbekannten Funktion fx zu bestimmen, (was bei räumlichen Gegenständen immer möglich ist), und zugleich jene Glieder zu erkennen, welche auf die Bestimmung von fx Einfluss haben: so erhält man das gesuchte Integral, wo man noch, um dieses letztere in der gehörigen Ausdehnung zu erhalten, die Constanten zu finden hat, die sich bei der wirklichen Anwendung immer aus bekannten zusammengehörigen Werthen von x und fx angeben lassen.

Es scheint vielleicht ungereimt, das Verhältniss $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ einer noch unbekannten Funktion suchen zu wollen?

Bedenkt man aber, dass jedes Ding erforscht werden kann, wenn es in Verbindung mit solchen Dingen betrachtet wird, deren Eigenschaften man bereits kennt, und die mit dem zu Erforschenden nothwendig in irgend einer Beziehung stehen: so ist kein Zweifel, dass man auch obiger Forderung Genüge leisten könne.

---

§. 2.

Anwendung des vorgetragenen Satzes.

Aufgabe.

Eine allgemeine Formel für die Bogenlänge einer ebenen Curve anzugeben.

Auflösung.

Es sey die Curve AMN, deren Beschaffenheit durch irgend eine Gleichung zwischen x und y in Beziehung auf die Axen AX, AY bekannt ist.

Man nehme A als Anfangspunkt der Coordinaten, setze $AP = x$, $MP = y = fx$, und die Länge des entsprechenden Bogens $AM = Fx$.

Offenbar ist, wenn $AP = x$ um das Stück $PP' = \Delta x$ wächst, $M'P' = f(x + \Delta x)$, der Bogen $AM' = F(x + \Delta x)$, und folglich der Bogen $MM' = AM' - AM = F(x + \Delta x) - Fx = \Delta Fx$.

Da hier Fx gesucht wird, so muss man vorerst den Quotienten $\frac{\Delta Fx}{\Delta x}$ ausmitteln, und dazu dient folgende Betrachtung:

Was ist der Bogen $MM' = \Delta Fx$?

Offenbar nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte M, M' in der Ebene, welche aber durch das Gesetz $y = fx$ bedingt wird.

Solcher Entfernungen zwischen M, M' kann es natürlich unendlich viele geben, welche aber in einer gewissen Beziehung zu einander stehen müssen, welche letztere von dem Bildungsgesetze der Curve abhängen wird.

Man vergleiche sonach ΔFx mit derjenigen unter allen möglichen Entfernungen zwischen M, M',

welche man wirklich kennt. Dass diese letztere keine andere als die Sehne MM′ ist, folgt von selbst.

Die allgemeinste Beziehung zwischen dem Bogen ΔFx und seiner Sehne, ist offenbar:

$$\Delta Fx = \text{Sehne } \Delta Fx \pm m \text{ Sehne } \Delta Fx$$

wo m den numerischen Coëffizienten bedeutet, der obiger Gleichung genügt.

Da aber

$$\text{Sehne } \Delta Fx = \sqrt{(MO^2+M'O^2)} = \sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$

und nach Taylor's Formel

$$\Delta y = \Delta fx = f(x+\Delta x) - fx$$

$$= f'x.\Delta x + f''x.\frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''x.\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= \Delta x\left(f'x + f''x.\frac{\Delta x}{1.2} + f'''x.\frac{\Delta x^2}{1.2.3} + \ldots\right)$$

sonach:

$$\Delta y^2 = \Delta x^2\left((f'x)^2 + f'x.f''x.\Delta x + wf^nx.\Delta x^{n-1}\right)$$

(wo $wf^nx.\Delta x^{n-1}$ jedes der noch folgenden Glieder vorstellt), so erhält man für die Sehne ΔFx folgenden Ausdruck:

$$\text{Sehne } \Delta Fx =$$

$$\Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + f'x \cdot f''x \cdot \Delta x + \ldots\right)}$$

Zieht man die Wurzel wirklich, und multiplizirt mit Δx, so ist das Glied $\Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$ das einzige, welches die Grösse Δx bloss einmal als Faktor enthält.

Man kann sonach die Gleichung ansetzen:

$$\text{Sehne } \Delta Fx = \Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + \varphi(\Delta x)$$

wo $\varphi(\Delta x)$ eine gewisse Funktion von Δx bedeutet, von der man weiter nichts weis, als dass sie die Grösse Δx in keinem Gliede als erste Potenz enthält.

Wenden wir diese Resultate auf die Beziehung an, welche wir zwischen dem Bogen ΔFx und seiner Sehne durch die Gleichung

$$\Delta Fx = \text{Sehne } \Delta Fx \pm m \text{ Sehne } \Delta Fx$$

ausgesprochen haben, so ergibt sich

$$\Delta Fx =$$

$$\Delta x \sqrt{1 + (f'x)^2} + \varphi(\Delta x)$$

$$+ m\Delta x \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + m\varphi(\Delta x)$$

und sonach der gesuchte Quotient

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} =$$

$$\sqrt{1 + (f'x)^2} + \frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$+ m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} + \frac{m\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$$

Da oben bewiesen wurde, dass in der Funktion $\varphi(\Delta x)$ kein Glied vorkömmt, welches die Grösse Δx nur ein Mahl als Faktor enthielte, so ist das Glied $\frac{\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$ also auch $\frac{m.\varphi(\Delta x)}{\Delta x}$ aus Gliedern zusammen gesetzt, welche sämmtlich die Grösse Δx enthalten, welche sonach auf die Bestimmung von Fx keinen Einfluss haben.

Wir hätten also bloss die Glieder

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)\right)^2}, \quad m\sqrt{\left(1 + (f'x)\right)^2}$$

zu betrachten, durch deren Integration man Fx bestimmen könnte.

Ich behaupte aber, dass der Coëffizient m von Δx abhängig ist, und dass man folglich auf das Glied

$$m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

bei der Bestimmung von Fx nicht zu sehen habe.

Denn, wäre m von Δx unabhängig, so hätte man die Gleichungen

$$\text{Bogen}(\Delta x) = \text{Sehne}(\Delta x) \pm m\,\text{Sehne}(\Delta x)$$

$$\text{Bogen}(\Delta x') = \text{Sehne}(\Delta x') \pm m\,\text{Sehne}(\Delta x')$$

u. s. w.

wo m stets denselben Werth haben müsste.

Diese Voraussetzung gibt die Proportion:

$$\text{Bogen}(\Delta x) : \text{Bogen}(\Delta x') = \text{Sehne}(\Delta x) : \text{Sehne}(\Delta x'),$$

weil die Faktoren $1 \pm m$, $1 \pm m$ gleich sind, wenn m von Δx unabhängig ist.

Obgleich die Ungereimtheit dieser Proportion auffallend ist, so kann man sie leicht darthun.

Denn man setze, es sey

$$\text{Bogen}(\Delta x) : \text{Bogen}(\Delta x') = \text{Sehne}(\Delta x) : \text{Sehne}(\Delta x')$$

eine Proportion, d. h.

$$\text{Bogen } MM' : \text{Bogen } MN = \text{Sehne } MM' : \text{Sehne } MN$$

(wo $\Delta x'$ durch PP'' vorgestellt ist.)

Man hätte also auch:

Bogen MM′ : (Bogen MN — Bogen MM′)

= Sehne MM′ : (Sehne MN — Sehne MM′)

d. h.

Bogen MM′ : Bogen M′N

= Sehne MM′ : NV

wenn NV = Sehne MN — Sehne MM′ abgeschnitten wird.

Da aber die Bogen ihren Sehnen proportional seyn sollen, so ist:

Bogen MM′ : Bogen M′N

= Sehne MM′ : Sehne M′N

Diese Proportion mit der vorigen verbunden, gibt

Sehne M′N = NV

also wegen MV = MM′

MV + VN = MM′ + M′N

eine offenbare Unwahrheit, welche aus der Voraussetzung hervorgegangen ist, dass m von Δx nicht abhängt.

Nachdem wir also wissen, dass der Coëffizient m, folglich auch das Glied

$$m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

von Δx abhängt, so folgt, dass die Funktion Fx, als Ausdruck für die Bogenlänge, bloss aus dem Gliede

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)}$$

gefunden werden könne.

Wir erhalten daher die bekannte Gleichung

$$Fx = \int\sqrt{1 + (f'x)^2} + \text{Const.}$$

zur Rectification ebener Curven, welche hier ohne Annahme eines Grundsatzes u. s. w. erwiesen, vorliegt.

Es sey z. B. die Curve eine gemeine Radlinie, der Anfangspunkt der Coordinaten im Scheitel der Curve, und die Axe derselben die Abscissen - Linie.

Für dieses Coordinaten - System hat man die Gleichung

$$y = fx =$$

$$\sqrt{(2rx - x^2)} + r \cdot \text{arc finv.} \frac{x}{r}$$

wo r den Halbmesser des Erzeugungs - Kreises bedeutet.

Man findet leicht

$$f'x = \sqrt{(2rx^{-1} - 1)}, \text{ also}$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} = \sqrt{2rx^{-1}}, \text{ woraus}$$

$$Fx = \sqrt{2r} \cdot \int x^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2rx} + C$$

folgt, wo aber $C = 0$, weil Fx mit x zugleich verschwindet.

Setzt man $x = 2r$, und nimmt das Resultat doppelt, so ergibt sich die Länge der ganzen Cycloide

$$= 8r.$$

Dieses merkwürdige Resultat führt mich auf ein noch merkwürdigeres Verhältniss zwischen dem Umfange einer Ellypse und dem einer Cycloide, wenn die Abmessungen dieser Curven ein bestimmtes Verhältniss beobachten.

Ich behalte mir es vor, dieses Verhältniss zu seiner Zeit darzuthun.

§. 3.

Aufgabe.

Die Bogenlänge einer Curve von doppelter Krümmung zu bestimmen.

Auflösung.

Es seyen x, fx, φx die Coordinaten irgend eines Punktes der gegebenen Curve, in Beziehung auf die coordinirten Ebenen, und ψx der Ausdruck für die Länge des Bogens, der dem Punkte

$$x,\ fx,\ \varphi x$$

(von irgend einem Punkte gerechnet) entspricht. Man hat sonach für den Punkt, dessen Coordinaten

$$x + \Delta x,\ f(x + \Delta x),\ \varphi(x + \Delta x)$$

sind, den ähnlichen Ausdruck

$$\psi(x + \Delta x)$$

als Bogenlänge, und

$$\psi(x + \Delta x) - \psi x = \Delta\psi x$$

= dem Bogen der Curve, welcher zwischen den betrachteten Punkten liegt.

Dieser Bogen ist nun wieder nichts anderes, als die Entfernung zweier Punkte im Raume, deren es un-

endlich viele gibt, und von welchen man wenigstens Eine kennt, nämlich die gerade Linie, welche die zwei Punkte verbindet.

Bekanntlich ist aber die Entfernung zweier Punkte im Raume, deren Coordinaten

$$x,\ y,\ z,\quad x',\ y',\ z',$$

sind

$$= \sqrt{\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)}$$

daher im gegenwärtigen Falle:

$$\text{Sehne } \Delta\psi x =$$

$$\sqrt{\Delta x^2 + (\Delta fx)^2 + (\Delta\varphi x)^2}$$

und da zwischen dem Bogen $\Delta\psi x$ und seiner Sehne wieder ein gewisses Verhältniss besteht, so sey:

$$\text{Bogen } \Delta\psi x = \text{Sehne } \Delta\psi x \pm m \text{ Sehne } \Delta\psi x$$

Entwickelt man den Ausdruck für die Sehne, so ist, weil

$$(\Delta fx)^2 = \left(f'x.\Delta x + f''x.\frac{\Delta x^2}{1.2} + f'''x.\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots\right)^2$$

$$= \Delta x^2\left((f'x)^2 + f'x.f''x.\Delta x + \ldots\right)$$

und eben so

$$(\Delta\varphi x)^2 = \Delta x^2\left((\varphi'x)^2 + \varphi'x.\varphi''x.\Delta x + \ldots\right)$$

Sehne $\Delta\psi x =$

$$\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right) + B}$$

wo B die Summe der folgenden mit Δx behafteten Glieder vorstellt.

Wird die Wurzel ausgezogen, so erhält man, als einziges Glied, worin kein Δx erscheint, den Ausdruck

$$\sqrt{1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2}$$

Es besteht also die Gleichung

$$\Delta\psi x =$$

$$\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + \Delta x.B' + m\Delta x\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + m\Delta xB'$$

22

woraus sich der Quotient

$$\frac{\Delta\psi x}{\Delta x} =$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + B' + m\sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)} + mB'$$

ergibt.

Da die Grösse B' den Faktor Δx enthält, so wäre die Funktion

$$\psi x$$

bloss aus den Gliedern

$$\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)},\quad m\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

zu bestimmen.

Weil aber rücksichtlich des Coëffizienten m dieselben Schlüsse gelten müssen, wie bei ebenen Curven, weil die zwei Punkte, deren Coordinaten

$$x,\ fx,\ \varphi x,\ x+\Delta x,\ f(x+\Delta x),\ \varphi(x+\Delta x)$$

sind, mit jenem Punkte, von dem aus die Länge der Curve gerechnet wird, als drei Punkte in einer Ebene liegen: so ist begreiflich, dass ψx bloss aus dem Gliede

$$\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

bestimmbar sey, d. h. es ist

$$\psi x = \int\sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)}$$

§. 4.

Aufgabe.

Eine Formel für die Quadratur ebener Curven anzugeben?

Auflösung.

Es sey, wie früher, $AP = x$, $MP = fx$, der Inhalt des Stückes APM eine gewisse Funktion von x

$$= \varphi x$$

Nimmt $AP = x$ um $PP' = \Delta x$ zu, so ist eben so

$$APM' = \varphi(x + \Delta x), \text{ daher}$$

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi x = \Delta \varphi x$$

= dem gemischtlinigen Trapeze $PP'MM'$.

Dieses letztere zerfällt in das Rechteck $PP'MO$, und in das Curven-Dreieck $MM'O$, dessen Inhalt, als von Δx abhängig, keine andere Form als

$$m.\Delta x.\Delta fx \text{ oder } m.\Delta x^2$$

haben kann, wo m ein Zahlen-Coëffizient ist.

Wir erhalten daher:

$$\Delta\varphi x = fx.\Delta x \pm m\Delta x^2$$

wo sich das doppelte Zeichen $\pm$ auf hohle und erhabene Curven bezieht.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{\Delta\varphi x}{\Delta x} = fx \pm m\Delta x$$

also

$$\varphi x = \int(fx) + C.$$

Wäre z. B. das zu berechnende Raumding ein Dreieck, also fx von der Form

$$\alpha + \beta x$$

so lässt sich die Aufgabe auf folgende Art lösen.

Man nehme ein rechtwinkliges Dreieck (weil sich jedes andere in zwei solche zerlegen lässt), setze den Anfangspunkt der Coordinaten in den Scheitel eines der Spitzen-Winkel, wodurch also $\alpha = o$ wird, nehme eine Cathete zur Abscissen-Linie, bezeichne des Dreiecks Grundlinie und Höhe mit b, h, so ist, weil für diesen Fall

$$\varphi x = \int \alpha x = \frac{\alpha x^2}{2}$$

und $\alpha = tg\, a = \frac{h}{b}$ ist

$$\varphi x = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{h}{b}$$

welches zwischen den Grenzen $x = o$ bis $x = b$ genommen, für die Fläche des ganzen Dreiecks den bekannten Ausdruck gibt:

$$\Delta(b, h) = \frac{bh}{2}$$

Es sey ferner die Curve eine Radlinie, deren Gleichung:

$$y = fx = \sqrt{(2rx - x^2)} + r.\ arc.\ sinv.\ \frac{x}{r}$$

in Beziehung auf das oben angenommene Coordinaten-System ist.

Daraus folgt:

$$\varphi x = \int (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + r. \int arc.\ sinv.\ \frac{x}{r} + C.$$

Integrirt man beide Glieder, und nimmt das so erhaltene Resultat doppelt, so erhält man, nach allen

Abkürzungen, für die Fläche eines Abschnittes, dessen Höhe $= x$ ist den Ausdruck:

$$\varphi x = (r + x)\sqrt{(2rx - x^2)} + 2rx.\ \text{arc. sinv.}\ \frac{x}{r}$$

$$- 2r^2.\ \text{arc. sin.}\ \sqrt{\frac{x}{r}} + \text{Const.}$$

wo aber Const. $= o$ ist.

Setzt man $x = 2r$, so ergibt sich für die Fläche der ganzen Curve der merkwürdige Ausdruck:

$$\text{Fläche} = 3\pi r^2$$

Diese Curve hat bekanntlich sehr viele merkwürdige Eigenschaften, von welchen ich aber folgende anzuführen, nicht unterlassen kann. Gesetzt, es wäre die Aufgabe aufzulösen:

„Eine gegebene Cycloidal - Fläche in zwei gleiche Theile zu theilen, so zwar dass die Halbirungslinie zur Grundlinie parallel läuft."

Es sey der Halbmesser des Erzeugungskreises der gegebenen Cycloide, der Einfachheit wegen $= 1$, also ihre Fläche $= 3\pi$.

Nach der Bedingung der Aufgabe wäre also folgende Gleichung aufzulösen:

$$(1 + x)\sqrt{(2x - x^2)} + 2x \cdot \text{arc. sinv. } x$$

$$- 2 \cdot \text{arc. sin. } \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{3\pi}{2} = 0.$$

Obschon diese Gleichung ziemlich verwickelt ist, so hat sie doch für x, als die Entfernung des gesuchten Halbirungspunktes vom Scheitel, einen rationalen Werth, und ich überlasse dem Leser das Vergnügen, denselben zu finden.

---

§. 5.

Aufgabe.

Eine Gleichung für den Kubikinhalt aller Körper anzugeben.

Auflösung.

Man beziehe den Körper auf die drei coordinirten Ebenen, und lege durch irgend einen Punkt, dessen Coordinaten

$$x,\ fx,\ \varphi x$$

sind, eine Ebene parallel zur Ebene yz, also senkrecht zur Ebene xy.

Dadurch wird ein gewisses Stück des Körpers abgeschnitten, welches zwischen dem Durchschnitte der gedachten Ebene mit dem Körper, und einem beliebigen Orte, von dem aus der Kubikinhalt zu nehmen ist, enthalten eine gewisse Funktion von x seyn wird.

Es sey diese Funktion $= Fx$, sonach zu dem Punkte

$$x+\Delta x,\ f(x+\Delta x),\ \varphi(x+\Delta x)$$

zwischen ähnlichen Grenzen genommen

$$F(x+\Delta x),\ \text{und folglich}$$

$$F(x+\Delta x)-Fx=\Delta Fx\ =\ \text{dem}$$

Inhalte des Körpers, der zwischen den Durchschnitten der Ebenen mit dem Körper, und der Oberfläche desselben enthalten ist.

Wird der Durchschnitt, dessen Abscisse x ist, auf den Andern, dem die Abscisse $x+\Delta x$ ent-

spricht, oder umgekehrt, projicirt, so erhält man einen cylinderartigen Körper, dessen Inhalt durch

$$F.\Delta x$$

vorgestellt werden kann, wo F die Fläche des projicirten Durchschnittes bedeutet.

Sollte der Ausdruck $F.\Delta x$ vielleicht willkührlich scheinen, weil der Körper doch kein eigentlicher Cylinder ist, so gebe man dem Körper den Werth

$$F.\Delta x + m\Delta x^2$$

je nachdem $F.\Delta x$ kleiner oder grösser als ein wirklicher Cylinder von denselben Abmessungen ist.

Ergänzt man diesen Kubikinhalt noch durch die Körperstücke, welche sich von dem cylinderförmigen Körper angefangen, bis an die Oberfläche des Körpers erstrecken, und deren Summe, weil sie von Δx abhängt, keine andere Form, als

$$n.\Delta x^2,\quad n'.(\Delta fx)^2,\quad n''(\Delta\varphi x)^2$$

haben kann, so erhält man

$$\Delta Fx = F.\Delta x \pm m\Delta x^2 + n\Delta x^2, \text{ also}$$

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = F \pm m\Delta x^2 + n\Delta x^2$$

woraus

$$Fx = \int(F) + C \quad \text{folgt.}$$

Da aber F nicht gegeben ist, sondern aus der Relazion zwischen x, fx, φx erst bestimmt werden muss: so ist ersichtlich, dass die Bestimmung von Fx allgemein eine doppelte Integration erfordert. Denn ist die Gleichung des Durchschnittes in seiner Ebene zwischen senkrechten Coordinaten

$$y = \psi x,$$

so ist die Fläche desselben

$$= \int \psi x \quad (\S. 4.)$$

folglich

$$Fx = \int(\int \psi x) + C.$$

Da der Körper, als Funktion von x, fx, φx darzustellen ist, so muss natürlich

$$\int \psi x$$

durch dieselben Grössen ausgedrückt werden, um das Integral

$$\iint \psi x = Fx$$

in gehöriger Form zu erhalten.

Als Anwendung wollen wir den Kubikinhalt einer Pyramide suchen.

Bedeutet B die Grundfläche, h die Höhe derselben, so ist, wenn man den coordinirten Ebenen, eine zu diesem Zwecke passende Lage gibt, den Anfangspunkt der Coordinaten in der Spitze angenommen,

$$F : B = x^2 : h^2$$

wo F die Fläche des Durchschnittes, und x dessen senkrechte Entfernung von der Spitze bezeichnet.

Man hat also

$$\int \psi x = F = \frac{Bx^2}{h^2}, \quad \text{und}$$

$$Fx = \int\int \psi x = \int \frac{Bx^2}{h^2}$$

$$= \frac{Bx^3}{3h^2} + C$$

wo aber $C = o$ ist, weil Fx mit x zugleich verschwindet.

Dieses Integral zwischen den Grenzen $x = o$

bis $x = h$ genommen, gibt für den Inhalt der ganzen Pyramide den bekannten Ausdruck

$$\text{Pyramide } (B, h) = \tfrac{1}{3} . B . h.$$

Entsteht der Körper durch Rotation, so bedeutet F die Fläche eines Kreises

$$= \pi . (fx)^2$$

wo fx die Natur der Erzeugungs-Curve angibt; daher ist für alle durch Rotation entstandene Körper:

$$Fx = \pi . \int \left((fx)^2 \right) + C.$$

Gesetzt, es hätte fx die Form

$$\sqrt{(2rx - x^2)}$$

also der Körper wäre eine Kugel, so folgt:

$$Fx = \pi \int (2rx - x^2)$$

$$= \pi \left(rx^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

sonach für $x = 2r$, der Inhalt der ganzen Kugel

$$= \tfrac{4}{3} \pi . r^3$$

u. s. w.

§. 6.

Aufgabe.

Die krumme Oberfläche eines Körpers zu bestimmen.

Auflösung.

Man durchschneide den Körper in einem beliebigen Punkte

$$x,\ fx,\ \varphi x$$

mit einer Ebene, senkrecht zur Ebene xy, und setze die krumme Oberfläche des dadurch abgeschnittenen Körpers $= Fx$.

Macht man auf dieselbe Art einen Schnitt im Punkte

$$x + \Delta x,\ f(x + \Delta x),\ \varphi(x + \Delta x)$$

so bedeutet $F(x + \Delta x)$ die Oberfläche dieses zweiten körperlichen Abschnittes, daher ist

$$F(x + \Delta x) - Fx = \Delta Fx =$$

der Oberfläche des Streifens, welcher zwischen den zwei Durchschnitten enthalten ist.

Der Inhalt dieses Streifens hängt offenbar von der Länge der Grenzlinien der Durchschnitte, und von der Entfernung dieser letztern, auf der krummen Oberfläche gerechnet, ab, und muss sich daher durch diese Stücke ausdrücken lassen.

Der Inhalt des gedachten Streifens muss also durch

$$\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x) \cdot \partial \pm m\Delta x^2$$

vorgestellt werden können, wo der erste Faktor die Länge der Grenzlinie bedeutet, welche dem Punkte

$$x, \quad fx, \quad \varphi x$$

entspricht, und ∂ die Entfernung der zwei Grenzlinien (auf der Oberfläche gerechnet) vorstellt.

Begreiflich gibt es sehr viele Entfernungen der zwei Grenzlinien, welche alle zu diesem Zwecke dienlich seyn müssen, wo ich aber absichtlich jene wähle, welche mit den betrachteten Stücken in unmittelbarer Verbindung steht.

Wir hätten also:

$$\Delta Fx = \text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x)\ \partial \pm m\Delta x^2$$

und weil ∂ auch die Länge des Bogens ist, der zwischen den Punkten

$x, fx, \varphi x$ und $x + \Delta x, f(x + \Delta x)\ \varphi(x + \Delta x)$

enthalten ist, so erhält man, wenn für diesen Fall der Ausdruck aus §. 3 benützt wird, mit Hinweglassung aller Glieder, worin die Grösse Δx vorkömmt,

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} =$$

$$\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x) \cdot \sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi'x)^2\right)}$$

also endlich:

$$Fx =$$

$$\int \left(\text{Grenzlinie } (x, fx, \varphi x)\ \sqrt{\left(1+(f'x)^2+(\varphi'x)^2\right)} \right)$$

Die Länge der Grenzlinie, als einer ebenen Curve, ergibt sich aus §. 2

$$= \int \sqrt{\left(1 + (\psi'x)^2\right)}$$

wo ψx die Gleichung des Durchschnittes in seiner Ebene vorstellt, daher ist:

$$Fx = \int \left(\int \sqrt{\left(1+(\psi' x)^2\right)} \cdot \sqrt{\left(1 + (f'x)^2 + (\varphi' x)^2\right)} \right) + C$$

wo sich das Integral - Zeichen innerhalb der Klammer bloss auf den Faktor bezieht, vor dem es steht.

Entsteht der Körper durch Umdrehung, so ist

$$\int \sqrt{\left(1 + (\psi' x)^2\right)}$$

= dem Umfange eines Kreises

$$= 2\pi \cdot fx$$

wo fx die Gleichung der Erzeugungs - Curve bedeutet, und da in diesem Falle

$$\varphi x = 0$$

ist, so erhält man für solche Körper

$$Fx = 2\pi \int \left(fx \sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} \right) + C.$$

Gesetzt der Körper sey eine Kugel, also

$$fx = \sqrt{(2rx - x^2)}$$

sonach

$$f'x = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$$

$$\sqrt{\left(1 + (f'x)^2\right)} = \frac{r}{fx},$$

also

$$Fx = 2\pi fr = 2\pi rx$$

folglich für $x = 2r$, die Oberfläche der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$.

Zum Schlusse will ich diese Methode auf die gleichförmig beschleunigte Bewegung anwenden.

Es wirke also eine unveränderliche Kraft auf einen Körper beständig fort, und der Körper habe nach Verlauf der Zeit t den Raum s zurückgelegt, der, als Funktion der Zeit, durch ft bezeichnet werde.

Nimmt t um Δt zu, so ist der zugehörige Raum

$$= f(t + \Delta t), \text{ also}$$

$$f(t + \Delta t) - ft = \Delta ft$$

= dem Raume, welcher während der Zeit Δt zurückgelegt wird.

Diesen Raum finde ich auf folgende Art:

Zu Ende der Zeit t hatte der Körper eine gewisse Geschwindigkeit

$$= \varphi t$$

d. h. das Vermögen, auch ohne fernere Einwirkung der beschleunigenden Kraft, sich gleichförmig mit der so erlangten Fähigkeit zu bewegen.

Kraft dieser letzteren hätte also der Körper während der Zeit Δt den Raum $\varphi t \cdot \Delta t$ zurückgelegt, vorausgesetzt, dass er während derselben nicht beschleuniget worden wäre.

Obgleich nun die beschleunigende Kraft während der Zeit Δt zu wirken nicht aufgehört hat,

so hat sie desswegen weiter nichts verursacht, als dass der während der Zeit Δt beschriebene Raum grösser ist, als $\varphi t \cdot \Delta t$, und zwar um ein Stück, welches bloss von der Beschleunigung herrührt.

Diese Zusammensetzung muss desswegen erlaubt seyn, weil der Körper die einmal erhaltene Fähigkeit φt durch die Beschleunigung nicht verlieren konnte.

Der Raum, welcher von der Beschleunigung während der Zeit Δt herrührt, muss als Funktion von Δt die Form

$$\psi t \cdot \Delta t^m$$

haben, wo natürlich $m > 1$ seyn muss, weil die Räume bei der beschleunigten Bewegung, nach dem Begriffe der Beschleunigung, in einem gröseren Verhältnisse, als dem der Zeiten, zunehmen müssen.

Wir haben also die Gleichung:

$$\Delta ft = \varphi t \cdot \Delta t + \psi t \cdot \Delta t^m$$

woraus

$$\frac{\Delta ft}{\Delta t} = \varphi t + \psi t \cdot \Delta t^{m-1}$$

und endlich

$$'ft = f\varphi t + 'C$$

folgt, weil das Glied

$$\varphi t \cdot \Delta t^{m-1},$$

wegen $m > 1$ die Grösse Δt enthält, sonach auf das gesuchte Integral keinen Einfluss hat.

Weil nun φt die Geschwindigkeit des Körpers zu Ende der Zeit t bedeutet, also $= ct$ ist, so hat man

$$ft = s = \int ct = \frac{ct^2}{2}$$

Man kann diesen Satz auf folgende Art kürzer erweisen.

Denn man kann setzen

$$\Delta ft = \varphi t \cdot \Delta t + m\varphi t \cdot \Delta t$$

wo das zweite Glied die Ergänzung, wegen der Beschleunigung bedeutet.

Man erhält

$$\frac{\Delta ft}{\Delta t} = \varphi t + m\varphi t$$

Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass m von Δt abhängt, und folglich das Glied $m \cdot \varphi t$ nicht zu betrachten kömmt.

Denn wäre m von Δt unabhängig, so hätte man die analogen Gleichungen:

$$\Delta ft = \varphi t \cdot \Delta t + m\varphi t \cdot \Delta t$$

$$\Delta' ft = \varphi t \cdot \Delta t' + m\varphi t \cdot \Delta t'$$

also auch die Proportion:

$$\Delta ft : \Delta' ft = \Delta t : \Delta t'$$

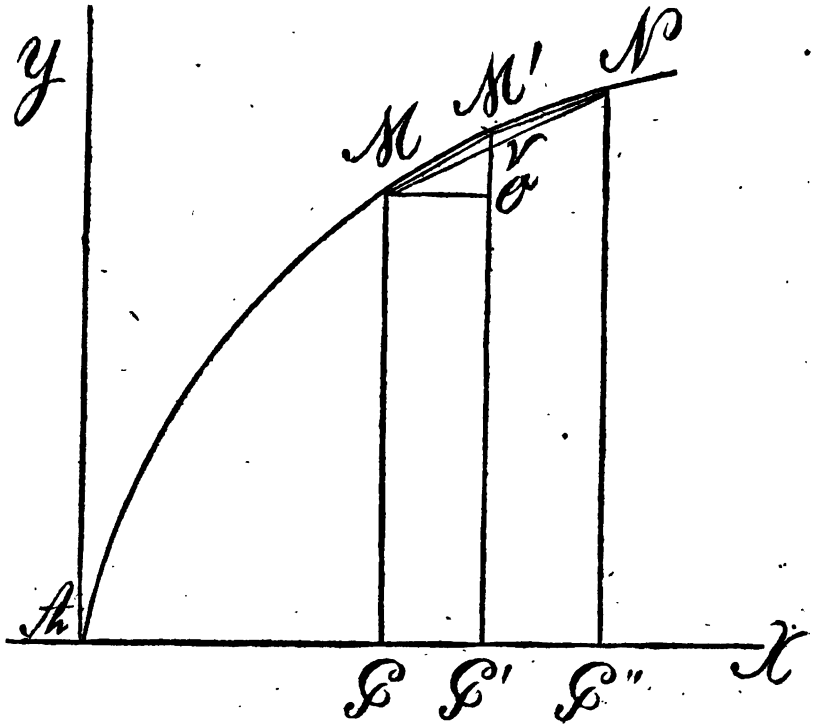
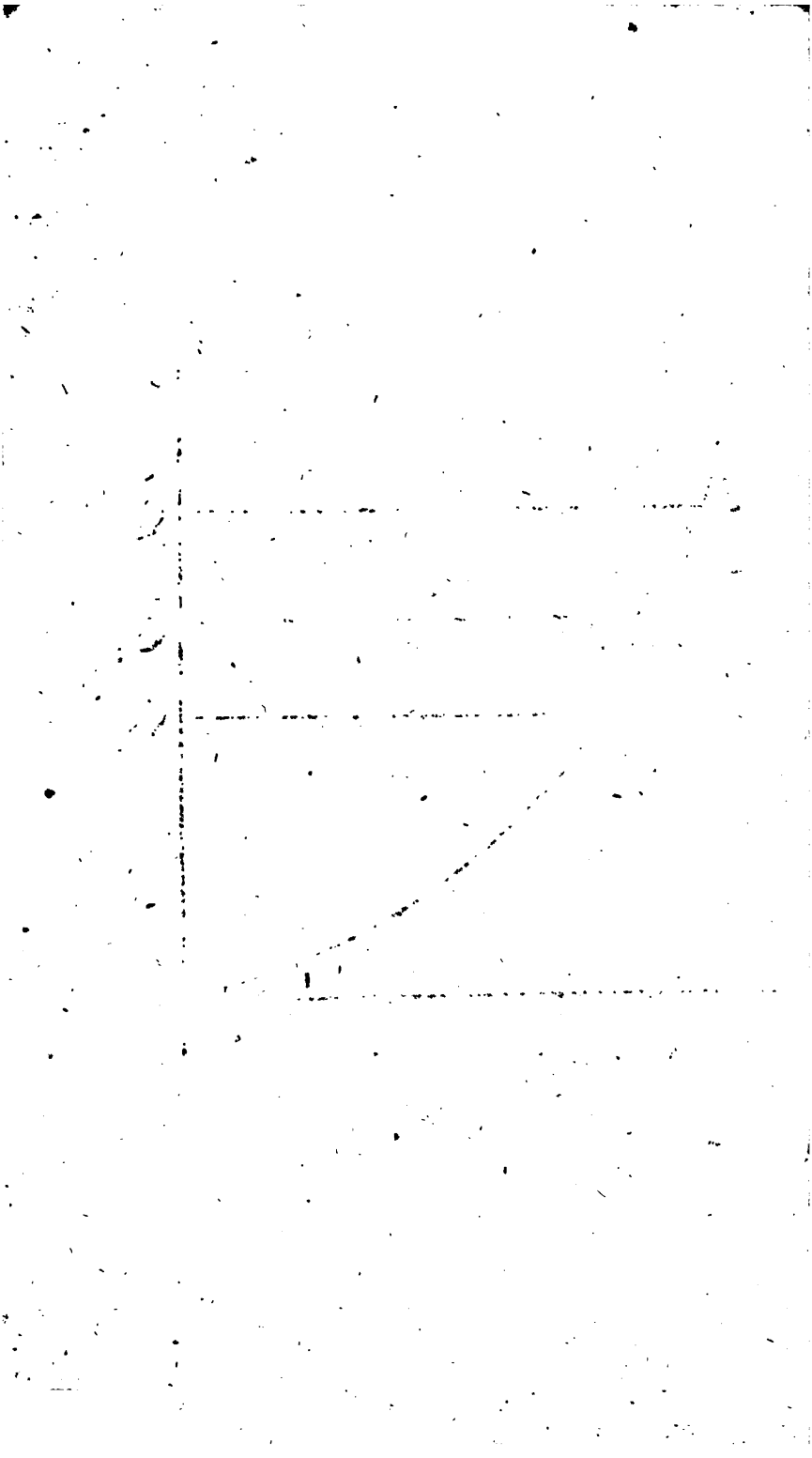
eine Eigenschaft der gleichförmigen Bewegung, was sonach der Voraussetzung widerspricht.

Der Coëffizient m ist also von Δt abhängig, d. h. man hat, wie früher:

$$ft = f\varphi t.$$

Ich bemerke noch, dass ich diese Methode bei jeder, wie immer gearteten Bewegung der festen so-

wohl als der flüssigen Körper mit demselben Erfolge gebraucht habe, und bin gesonnen, die erhaltenen Resultate, nebst einer kurzen, neuen Anleitung zur Differenzial-Rechnung baldigst herauszugeben.


y
M
M'
N
r
a
h
E
E'
E''
x